Title	Euclid 空間ノ一ツノ characterisation
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 169 p.685-p.693
Issue Date	1939-11-17
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74680
rights	
Note	

750. Euclid空間ノ一ツノCharacterisation

角谷　靜夫（阪大）

Banach空間が一般Euclid空間（即チ、有限次元ノEuclid空間，separableナHilbert空間及ビseparableデナイHilbert空間）(1) デアルタメノ一ツノ必要且十分ナ條件ヲ與ヘルノが目的デアル。

Banach空間Eノ一ツノclosed linear subspace E_1が與ヘラレタトキE_1デ定義サレタlinear functionalハ良ク知ラレタ如クE全体ヘソノnormヲ上ゲナイヤウニlinearニ擴張スルコトが出来ル。

シカシlinear operatorニ對シテハ同様ナ定理ハ成立シナイ。即チE_2ヲ他ノBanach空間トスルトキE_1ヲE_2ニウツスlinear operatorハ必ズシモ、E全体ヘソノnormヲ上ゲナイヤウニ擴張スルコトハ出來ナイ。（取ル値ハ常ニE_2ニ屬スルモノトスル）。コレハ特ニ$E_2=E_1$デ且ツ始メノlinear operatorがE_1ニ於ケルidentical transformationデアル場合ヲ考ヘテ見レバヨクワカル。コノ場合ニハ我々ノ問題ハEカラE_1ヘノprojection(2)デ

---

(1) 一般Euclid空間トハBanach空間EデソノnormがE任意ノ$x, y \in E$ニ對シテ$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ヲ滿足スルモノデアル。

(2) EカラE_1ヘノprojectionトハEヲE_1全体ヘウツスlinear operator PデアッテP^2=PヲF滿足スルモノヲ云フ。

ソノ normが1ニナルモノが存在スルカドウカト云フ問題ニナル。又逆ニカヽル projection Pが存在スレバ E_1ヲE_2ヘウツス任意ノ linear operation $y=U(x)$ ニ対シテ $y=U_1(x)=U(P(x))$ トオケバ求ムル拡張が得ラレルコトハ明ラカデアル。コツテ我々ハ単ニEカラE_1ヘノ projection ヲ問題ニスレバヨイコトが分ル。

然ルニ F. J. Murray[3]が示シタ如ク、(L_p) $(p>1)$ ニ於テハ normが有限ナ projectionが存在シナイヤウナ closed linear subspaceが存在スルカラ我々ノ問題ハ常ニ可能デハナイ。然ラバコノ問題(normが1ノ場合)が如何ナル closed linear subspaceニ對シテモ可能デアル如キ Banach空間ハ如何ナルモノカ？ コレが一般Euclid空間ニ限ルト云フノが我々ノ結果デアル。一般Euclid空間ニテハ如何ナル closed linear subspaceニ對シテモ projectionが存在スルコトハ容易ニ示スコトが出来ルカラ、コレデ一般Euclid空間ノ一ツノ characterisationが與ヘラレタコトニナル。即チ

定理1. Banach空間Eが一般Euclid空間デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハEノ任意ノ closed linear subspace E_1 ニ對シテEヲE_1ヘウツスnorm 1ノ projectionが存在スルコトデアル。

---

(3) F. J. Murray: On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p, Trans Amer. Math. Soc. 41 (1937).

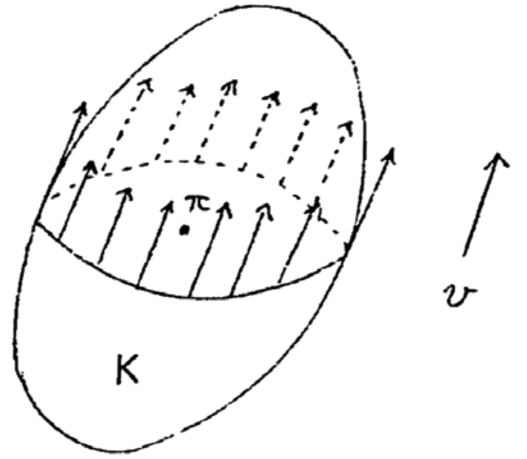
必要ナコトハ明カ。十分ナコトヲ証明スルタメニハ、有限次元ノ所ダケヲ考ヘレバヨイ。次ノ定理ヲ証明スレバ足リル。

定理2. Eヲ3次元ノ Minkowski 空間[4] トスルトキ、若シ原点ヲ通ル任意ノ平面 E_1 ニ對シテEヲ E_1 ヘウツス norm 1 ノ projection P ガ存在スレバEハ Euclid 空間デアル。

定理2ハ次ノ如キ形ニ変形スルコトガ出来ル。

定理3. Kヲ3次元ノ(Euclid)空間内ノ有界ナ凸集合ニシテ、原点ヲ内点ニ含ミ且ツ原点ニ関シテ Symmetric デアルモノトスル。若シ、原点ヲ通ル任意ノ平面 π ニ對シテ一ツノ方向 v ガ定マッテ、Kノ表面ト π トノ切口ノ各点ヲ通ッテ v ノ方向ニ引イタ直線ガ何レモKノ内部ヲ通ラナイ(即チKノ Stützgerade ニナル)ナラバ、Kハ Ellipsoid デアル。

コレハ定理2ニ於テ $\|x\| \leq 1$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲKトスレバヨイ。



---

(4) 有限次元ノ Banach 空間ヲ Minkowski 空間ト云フ。

Kノ表面ガ滑カデ、各点デ切平面ガ unique ニ定マリ、且ツ各々ノ切平面ハ一点ノミニテ K ニ切スル場合ニハ、コノ定理ハ既ニ証明サレテヰル。[5]

コレデハ、ソノ様ナ假定ハナイカラ証明ハ少シ面倒デアル。シカシ大体同ジ方法デ証明スルコトガ出来ル。

先ヅKノ表面ノ点ニテ、切平面ガ unique ニ定マル点ヲ regular ト呼ビ、regular デナイ点ヲ singular デアルト呼ブ。Kノ singular ナ点全体ハ spherical measure 0 デアル。[6] 但シKノ表面上ノ点集合 A ノ spherical measure トハ A ヲ K ノ中心ヨリ unit sphere 上ニ radial ニ射影シタトキノ unit sphere ノ上ノ像ノ measure（球面上ノ Lebesgue measure）ノコトデアル。

次ニKヲ原点 O ヲ通ル任意ノ平面 π デ切リ、切口ノ曲線 C_π ヲ考ヘル。C_π ノ上ニKノ regular point ガ dense ニ乗ッテヰルトハ限ラナイ。シカシ任意ノ原点ヲ通ル平面 π_0 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ、π_0 トノ交角ガ ε ヨリ小サク、且ツ C_π 上ニKノ regular point ガ dense ニアル如キ、原点ヲ通ル平面 π ガ存在スル。コレハ K ノ singular point ガ spherical measure 0 デアルコトカラ容易ニ得ラレル。（ Fubini ノ定理ト同様ノ

---

(5) W. Blaschke: Kreis und Kugel; 160 頁

(6) Bonnesen und Fenchel: Theorie der konvexen Körper, 頁

考ヘヲ用フレバヨイ)。

Kガ ellipsoid デアルコトヲ示スニハ任意ノ原点ヲ通ル平面 π ニ對シテ C_π ガ ellipse ニナルコトヲ云ヘバヨイ。次ニ我々ハ補助定理1ニ於テ、C_π ノ上ニ regular point ガ dense ニアル場合ニハ C_π ガ ellipse デアルコトヲ証明スル。サウスレバ上記ノコトヨリ任意ノ C_π ハカカル C_π ノ limit トシテ與ヘラレルカラ、任意ノ C_π ガ ellipse トナリ定理3ノ証明ガ完結スルノデアル。

補助定理1. C_π ノ上ニ regular point ガ dense デアレバ C_π ハ ellipse デアル。

補助定理1ヲ証明スルニハ、次ノ補助定理2ヲ証明スレバヨイ。

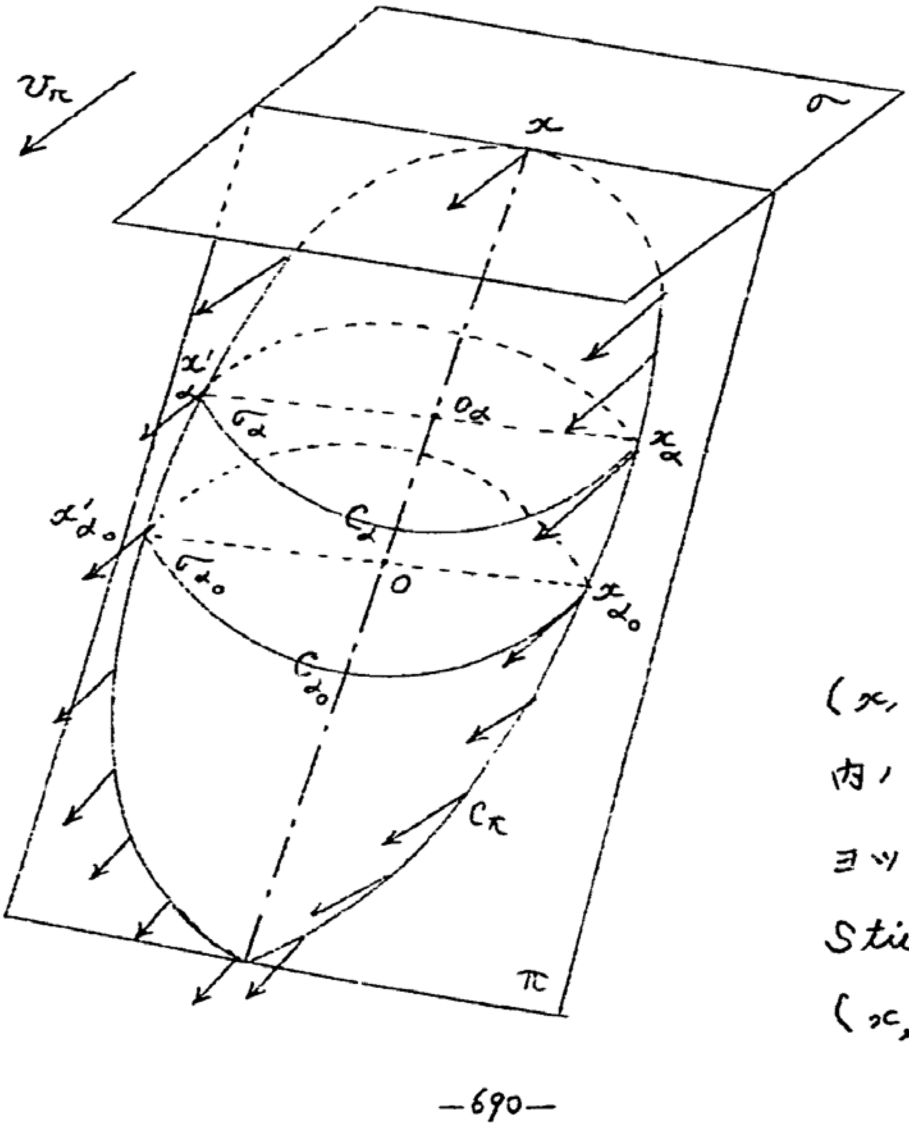
補助定理2. C_π 上ノ一点 x ガ regular ナラバ x ヲ通ル C_π ノ直径ハ、x ニ於ケル C_π ノ切線(コレハ明カニ存在シテ unique ニ定マル)ニ平行ナスベテノ C_π ノ弦ヲ二等分スル。

<u>補助定理2ヨリ補助定理1ヲ証明スルコト</u>. x ヲ C_π 上ノ任意ノ点トスレバ、コレハ C_π 上ノ regular point ノ limiting point デアル。

x ニ右(又ハ左)カラ收斂スル C_π 上ノ regular point ノ sequence ヲ $\{x_n\}$ トスレバ x_n ニ於ケル切線ハ x ニ於ケル右(又ハ左)ノ切線ニ收斂スル。ヨッテ、容易ニ分ル

如ク、コノ切線ニ平行ナ C_π ノ弦ハスベテ x ヲ通ル C_π ノ直径ニヨリ二等分サレル。此ノ如クシテ C_π ノ各直径ニ対シテソレニ "conjugate" ナ方向ガ定マリソノ方向ノ弦ハスベテモトノ直径ニヨリ二等分サレル。ヨッテ C_π ハ ellipse デアル。（補助定理 1 ノ証明終）.

補助定理２ノ証明. x ニ於ケル K ノ切平面（コレハ x ガ regular デアルカラ unique ニ定マル）ヲ σ トシ、σ ト平行ナ平面 σ_α ニヨル K ノ切口ノ曲線ヲ C_α, C_α ト C_π トノ交点ヲ x_α, x'_α トセヨ。定理３ノ仮定ヨリ、平面 π ニ対シテレーツノ方向 v_π ガ定マッテ C_π 上ノ各点 x_α ヨリ v_π ノ方向ニ引イタ直線（x_α, v_π）ハ何レモ K ノ Stützgerade



ニナル。特ニ $x_\alpha = x$ ノトキヲ考ヘレバ、x ニ於ケル K ノ切平面ハ σ 一ツシカナイカラ（x, v_π）ハ σ 内ノ直線デアル。ヨッテ、各々ノ Stützgerade（x, v_π）ハ平

面O_α内ノ直線デ、平面O_α内ニ於ケルC_αヘノ Stützgerade デアル。

コレヨリ補助定理3ニヨリ、C_αハ互ニ相似デアリ、シカモ何レモxヲ通ルKノ直径ガソノ相似ノ中心ヲ通ッテヰルコトガワカル。O_αガ特ニ原点ヲ通ッテヰルトキ($\alpha = \alpha_0$ナルトキトスル)ヲ考ヘレバC_{α_0}ハKノ中心Oニ對シテ Symmetric デアルカラ、各々ノC_αモ中心O_α(O_αハ$x_\alpha x'_\alpha$トxヲ通ル直径O_xトノ交ハリ)ヲ有シテO_αニ對シテ symmetric デアル。ヨッテ$x_\alpha x'_\alpha$ハO_αニヨリ二等分サレル。

$x_\alpha x'_\alpha$ハ何レモxニ於ケルC_πヘノ切線(即チO_αトπトノ交ハリ)ニ平行デアルカラ、補助定理2ノ証明ハ完結スル。

ヨッテ我々ハ次ノ補助定理3ヲ証明スレバヨイ。

補助定理3. 平面上ニ二ツノ convex closed curve C, C' ガアリ、一点Oヲ内部ニ共有スルモノトスル。Oヲ通ル任意ノ半直線トC, C'トノ交点ヲA, A'トスルトキ、A, A'ニ於イテ、互ニ平行ナC, C'ニ對スル Stützgerade ヲ常ニ引キ得ルトキハC, C'ハ互ニ相似デアリ、ソノ相似ノ中心ハOデアル。

コレヲ示スタメニハ、次ノ補助定理4ヲ証明スレバヨイ。

補助定理4. $f(x)$, $g(x)$ ガ $a \leqq x \leqq b$ ニテ定義サレタ連続函數デ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ $D_+ f$, $D_- f$, $D_+ g$, $D_- g$ ガ存在スルモノトセヨ。若シ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ $D_+ f = D_+ g$, $D_- f = D_- g$ ガ成立スレバ $f(x) - g(x) = \text{constant}$ デアル。

証明: $a \leqq x \leqq b$ ナル任意ノ x 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\delta = \delta(x) > 0$ ガ定マッテ $0 < h < \delta(x)$ ナル任意ノ h ニ對シテ

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - D_+ f(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - D_+ g(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - D_- f(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(x) - g(x-h)}{h} - D_- g(x) \right| < \varepsilon$$

トナル。$D_+ f(x) = D_+ g(x)$, $D_- f(x) = D_- g(x)$ ナル故、カヽル h ニ對シテハ $|(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))| < 2\varepsilon h$, $|(f(x) - g(x)) - (f(x-h) - g(x-h))| < 2\varepsilon h$.

Borel ノ被覆定理ニヨリ $a \leqq x \leqq b$ ハ $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ ナル形ノ有限個ノ open intervals ニヨッテ覆ハレルカラ、$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$ ナル有限個ノ $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ヲトッテ $|(f(x_i) - g(x_i)) - (f(x_{i-1}) - g(x_{i-1}))| < 2\varepsilon |x_i - x_{i-1}|$ ガ $i = 1, 2, \cdots, n$ ニ對シテ成立スル様ニ出来ル。ヨッテ

$$\left| (f(b) - g(b)) - (f(a) - g(a)) \right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \left| (f(x_i) - g(x_i)) \right.$$

$$-\left(f(x_{i-1})-g(x_{i-1})\right)\Big| < 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}| = 2\varepsilon(b-a).$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアッタカラ $f(b)-g(b)=f(a)-g(a)$.

b ノ代リニ任意ノ $a\leqq x\leqq b$ ナル x ヲトレバ

$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)$ ヲ得ルカラ $f(x)-g(x)$

ハ constant デアル。